Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

On se place sur E un espace vectoriel réel normé.
On appelle suite récurrente d'ordre k une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_{n-k+1})$, $\forall n \geq k$.

1. Généralités sur les suites récurrentes. —

On suppose que $u_0 \in I$ avec I un fermé de E stable par f.

1. *Suites réelles.* —
   - Méthode pour résoudre traiter des suites récurrentes d'ordre 1 : trouver un sous-intervalle stable par f, puis étudier f sur cet intervalle.
   - Pro : Soit u_n suite récurrente d'ordre 1.
     1) Si f est croissante, u_n est monotone et son sens de monotonie est donné par $sgn(u_1 - u_0)$.
     2) Si f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposés.
   - Pro : Si u_n converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$. Ainsi, si f est continue sur I et si $f(I) \subset [a, b]$ alors u_n récurrente et convergente $\Rightarrow u_n$ converge vers un point fixe de a.
   - Ex : Pour $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$, on a $u_n \to 1$.
   - Ex : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si u_n converge, sa limite est -1 ou 3.
   - Contre-ex : $f(x) = x + \chi_{\{0\}}(x)$. Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \to 0$ mais $f(0) = 1 \neq 0$.
   - Ex : $u_{n+1} = cos(u_n)$
   - Ex : $u_{n+1} = sin(u_n)$
   - Ex : $u_{n+1} = cosh(u_n)$
   - Ex : $u_{n+1} = sinh(u_n)$
   - Lemme de la grenouille : $I = [0, 1]$, $f : I \to I$ continue, $u_0 \in I$. Alors u_n converge ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$.
   - Contre-ex : $f(x) = 1 - x$ et $u_0 = 0$. alors $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$.
2. *Suites vectorielles.* —
   - Pro : Soit $(u_n)_n$ suite récurrente d'ordre k dans E, $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_{n-k+1})$. Alors la suite $(v_n)_n$ de E^k définie par $v_n = (u_n, \dots, u_{n+k-1})$ est récurrente d'ordre 1 pour $g((x_1, \dots, x_k)) := (f(x_1, \dots, x_k), x_2, \dots, x_k))$.
     Dans le cas où f est une application linéaire de $E^k \to E$ ($(u_n)_n$ est récurrente linéaire), g est alors une application linéaire ($(v_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 1).
     Pour $E = \mathbb{R}$, f est une forme linéaire donnée par un vecteur $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et g est la matrice compagnon associée à $(x_1, \dots, x_k)$.
   - On peut ainsi toujours ramener l'étude d'une suite récurrente à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.
   - Def : Equation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire.
   - Ex : En dimension 2 avec $X^2 - X - 1$.
   - Rem : Il n'y a pas de méthode générale sinon.
3. *Quelques exemples fondamentaux de suites récurrentes.* —
   - Sur un Ev : Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + B$. Converge ssi $B = 0$
   - Suites géométriques : $u_{n+1} = A.u_n$ où A application linéaire.
   - Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = \frac{A.u_n+B}{1}$. Si $A = Id$, u_n est arithmétique de raison 1. Si $Id - A$ est inversible, $v_n = u_n - B.(Id - A)^{-1}$ est géométrique de raison A, et $u_n = A^n(u_0 - B.(Id - A)^{-1}) + B.((Id - A)^{-1})$.
   - Sur $\mathbb{R}$, $A = q \in \mathbb{R}$ et la suite converge si $|q| < 1$, diverge si $|q| > 1$. Sur $\mathbb{R}^d$, cela dépend des valeurs propres de A et du choix de u_0.
   - Sur $\mathbb{R}$: $(u_n)_n$ vérifie une récurrence homographique si $u_{n+1} = \frac{a.u_n+b}{c.u_n+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Elle est bien définie si $u_n \neq \frac{-d}{c}$, $\forall n$.
   - Pro : On considère l'équation $\frac{a.u_n+b}{c.u_n+d} = x \Leftrightarrow cx^2 - (a - d)x - b = 0$.
     1) Si l'équation a deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors on a $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = (\frac{a-\alpha.c}{a-\beta.c})^n.\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$.
     2) Si l'équation a une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{c}{a-\alpha.c}.n$.
   - Ex : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, $u_0 = 1$. L'équation associée est $x^2 = 0$, donc $\frac{1}{u_n} = 1 + n$, càd $u_n = \frac{1}{n+1} \to 0$.

2. Suites récurrentes et points fixes. —

On suppose maintenant que E est en plus complet.

1. *Théorème du point fixe de Picard-Banach et applications.* —
   - Théorème du point fixe de Picard-Banach : Pour F un fermé de E et $f : F \to F$ qui est k-Lipschitzienne, $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s.
     On a même : $|u_{n+1} - s| \leq k|u_n - s| \leq k^{n+1}|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire)
   - Cor : Le théorème est aussi vrai ssi il existe un n tq $f \circ \dots \circ f$ est k-Lipschitzienne.
   - App : Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de U $\mathbb{R}^n$, localement Lipschitz en sa seconde variable, et soit $(t_0, x_0) \in I \times U$.
     Alors il existe (Y, J) où J est un intervalle inclus dans I et $Y \in C^1(J, U)$ avec $\forall t \in J$, $Y'(t) = F(t, Y(t))$ et $Y(t_0) = x_0$. (solution du problème de Cauchy de l'ED associée à F) De plus, pour (f, J_1) et (g, J_2) solutions du problèmes de Cauchy, $f \equiv g$ sur $J_1 \cap J_2$.
   - Théorème avec le compact.
   - Contre-ex : $f(x) = \frac{x}{2}$ sur $]0, 1[$ non fermé.
   - Contre-ex : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $[0, +\infty[$ est 1-Lipschitz.
   - App : Pour $\varphi(x) = x - cf(x)$, $c \neq 0$, on a $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. On peut alors faire varier c et l'intervalle I pour essayer de rendre φ k-Lipschitzienne afin de pouvoir approximer son point fixe, et ainsi approximer un zéro de f.
2. *Classification des points fixes.* —

- Sur $\mathbb{R}$:
- Classification des points fixes. Si f est C^2 alors on peut facilement exprimer les vitesses de convergence/divergence dans chaque cas, ainsi que la superattractivité.
- Ex : Cas critique
- Ex : Equivalent donnant la vitesse de convergence pour $f(x) = sin(x)$. Celle-ci est basse.
- Quelques dessins pour $\sqrt{1+x}$, x^2, $e^{2x} - 1$.
- Méthode des petits pas : Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ avec un $DL(0)$ de la forme : $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$ avec $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.
  Si $u_0 \in [0, \eta]$ pour η assez petit et si $\gamma := \frac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$, alors la suite récurrente $(u_n)_n$ vérifie : $u_n = \frac{1}{\sqrt[p]{pn\alpha}} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2 \sqrt[p]{p\alpha}} . \frac{log(n)}{n \sqrt[p]{n}} + o(\frac{log(n)}{n \sqrt[p]{n}})$.
- Exemple sur $f(x) = sin(x)$.
- **Dev** : Processus de Galton-Watson : Soient $X_{n,k}$ des v.a iid de loi discrète sur $\mathbb{N}$, intégrables. On définit la suite de v.a. $(Z_n)_n$ par $Z_0 := 1$ et $Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$.
  Alors la probabilité d'extinction $a := P(\{\exists n \text{ tq } Z_n = 0\})$ vaut 1 si $E[X_{0,0}] < 1$ ou si $P(X_{0,0} = 1) = 1$ et est dans $[0,1[$ si $E[X_{0,0}] \geq 1$ et $P(X_{0,0} = 1) < 1$.
  On peut de plus approcher cette probabilité avec la suite récurrente $u_0 = P\{X_{0,0} = 0\}$ et $u_{n+1} = E(u_n^{X_{0,0}})$.
- Appli à Galton-Watson
- Sur $\mathbb{R}^n$:
- Théorème avec le rayon spectral.
- La superattractivité a encore lieu si $f'(a) = 0$.

3. Application aux orbites de suites. —

- Def : Orbite de suite
- Ex : $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$
- Def : Si on a $f_{(n)}(x) := f \circ \cdots \circ f(x) = x$ pour un $n \geq 1$ et $f_{(k)}(x) \neq x$ pour tout $0 < k < n$, alors x est n-périodique pour f.
- Théorème de Sarkowski : Si $f : I \to I$ est continue, avec I intervalle, et admet un point 3-périodique, alors elle admet des points n-périodiques pour tout $n > 1$.

3. Méthodes numériques itératives à un pas. —

1. Méthode de Newton. —

- Def+Pro : On dit que u_n converge quadratiquement vers s ssi il existe $0 < M < min(1, \frac{1}{|u_0 - s|})$ tel que $|u_{n+1} - s| \leq M.|u_n - s|^2$.
  On a alors $|u_n - s| \leq \frac{M^{2^{n+1}}}{M}.|u_0 - s|^{2^n} \leq M^{2^n} \frac{(M|u_0-s|)^{2^n}}{M}$.
- **Dev** : Méthode de Newton polynomiale : Pour P un polynôme réel à racines réelles simples $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$, la fonction $\Phi : x \in [\lambda_r, +\infty[\mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in [\lambda_r, +\infty[$ est bien définie.
  Pour tout $x_0 \in [\lambda_r, +\infty[$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_r et quadratiquement àpcr.
- App : Cela permet d'approcher rapidement des zéros de polynômes comme $x^2 - a$. Si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $x_n \in \mathbb{Q}$.
- Rem : La méthode de Newton peut être appliquée à des fonctions $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles on a $x \in U$ tel que $\varphi(x) = 0$, φ est de classe C^2 sur U, et $D(\varphi)_x$ inversible.
  Il existe alors un voisinage V de x sur lequel $\Phi : x \in V \mapsto x - (D(\varphi)_x)^{-1}(\varphi(x)) \in V$ est bien définie, et pour tout $u_0 \in V$, $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ va converger quadratiquement vers x.
- Rem : Dans le cas réel avec $U =]a,b[$, on a des cas particuliers où le voisinage V est d'une forme plus commode.
- Rem : Cela permet d'approcher des points fixes répulsifs.

2. Méthode du gradient. —

- But : On remplace la recherche de la solution à $Ax = b$ par la recherche d'un minimum local à la fonction $< Ax, x > - < b, x >$, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Lemme de Kantorovich
- Méthode du Gradient à pas optimal
- Rem : On a aussi la méthode du gradient à pas conjugué.

3. Résolution de systèmes linéaires. —

- Méthode de résolution d'un système linéaire
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- Def : Relaxation. Intervalle de convergence.
- Pro : Cela ne converge pas quand le rayon spectral est > 1.

Références

Gourdon : Suites récurrentes, méthodes. Equation caractéristique pour la récurrence linéaire. Suites arithmétiques, géométriques. Suites homographiques. Th du point fixe itéré.
Rouvière : Exemple pour sin,cos,ch,sh. Th du point fixe de Picard. Dessins pour des points fixes. Méthode de Newton Polynomiale (Dev)
Ouvrard : Processus de Galton-Watson (Dev).
Francinou,Gianella (Analyse 1) : Lemme de la grenouille. Orbite de suites, th de Sarkowski.
Demailly : Classification des points fixes. Méthode de la sécante.
Hiriart-Urruty : Lemme de Kanorovitch, Gradient à pas optimal.
Rombaldi : Méthode des petits pas. Résolution de systèmes linéaires.
Hauchecorne : Contre-Exemples de suites ayant des problèmes.

June 11, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes